

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДЛЯ ОТРИМАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОЛОГІЧНИХ ТА ЕНЕРГЕТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

### **Вступ**

Коли вирішується задача аналізу і синтезу (проектування) електричних систем досліджувач, як правило, зштовхується з проблемою складності їх математичного опису, а за наявності останнього, – з проблемою отримання аналітичного рішення. Останнє використовується для аналізу різноманітних режимів роботи системи, або для синтезу оптимальних режимів. За винятком простих моделей (лінійних, малої розмірності), що мають просте аналітичне рішення, більшість реальних об'єктів електродинаміки нелінійні, динамічні, багатомірні. Отримати аналітичний зв'язок між відповідними змінними цих об'єктів досить складно, а під час неможливо. В таких випадках, як метод наукового пізнання, використовується технологія комп'ютерного чисельного моделювання процесів у досліджуємому об'єкті. Об'єкт представлено математичною моделлю, що відображає перетворення множини упорядкованих по дискретам часу чисельних значень одних змінних (вхідних) в інші (вихідні). Сучасні засоби обчислювальної техніки досить потужні, щоб вирішити більшість задач чисельного моделювання. Але неможливо змоделювати всі можливі варіанти часових послідовностей вхідних змінних. Тому чисельне моделювання без подальшого аналітичного узагальнення не може гарантувати достатності отриманої інформації про досліджуємий об'єкт, особливо коли він нелінійний, багатомірний, динамічний. Ситуація ще більш ускладнюється, якщо треба вирішити задачу синтезу оптимального режиму функціонування об'єкту, тобто знайти такі параметри  $\beta^*$  чи керуючі впливи  $U^*(t)$ , за яких досягається екстремум функціоналу якості  $J(x)$  вектор-функції змінних  $X(t)$  об'єкту при обмеженнях на області зміни  $X(t)$ ,  $U(t)$ ,  $\beta$  та урахування їх взаємозв'язку математичною моделлю:

$$\dot{X} = f(X, U, \beta, t), \quad (1)$$

де  $X, U$  – вектор-функції часу  $t$ ;

$f$  – (як правило) гладке нелінійне відображення множини  $(X, U, \beta, t)$  в множину  $\dot{X}(t)$  похідних  $X$  по  $t$ .

У вище наведених та традиційних для теорії ідентифікації задачах, якщо є множини експериментальних даних, отриманих з чисельного або

© А.А. Щерба, В.М. Мирунко, А.М. Сільвестров, Л.Ю. Спінул, 2004

натурного експерименту, пропонується використовувати методи оцінювання структури і параметрів математичних залежностей:

- а) “вхід “ $X$ ” – вихід “ $Y$ ” досліджуемого об’єкту;
- б) множини параметрів “ $\beta$ ” моделі об’єкту і/або параметризованого керуючого впливу  $U(\beta, t)$  в показник якості “ $J$ ”.

### Постановка задачі

Методам структурно-параметричної ідентифікації, тобто побудови математичної моделі функціонального зв’язку змінних  $X, U$ , на яких відтворюється ця модель, присвячено велику кількість робіт, наприклад, огляд, наведений в [1]. В роботі [2] задача ідентифікації поділяється на апроксимативну (метод “чорного” ящика [3]), де не враховується фізична структура об’єкту ідентифікації, і на задачу ідентифікації моделлю, яка враховує фізичну структуру об’єкту і, як правило, вимагається на тільки близькість поведінки об’єкту і моделі, але і близькість коефіцієнтів моделі до фізичних параметрів об’єкту [4].

Зупинимось лише на другій частині задачі – задачі отримання аналітичної залежності  $J(\beta)$  показника  $J$ , як функції вектора  $\beta$  параметрів, за якими він оптимізується.  $J(\beta)$  являє собою невідому нелінійну багатомірну гладку залежність, яка представлена набором числових значень  $J(\beta_1), \dots, J(\beta_N)$ , де  $\beta_i, (i = \overline{1, N}) - N$  таблиць  $(n \times N)$  числових значень вектора  $\beta$  і відповідних до них значень  $J_N$  показника якості  $J$ . За цими даними слід визначити структуру і параметри залежності  $J(\beta)$ , яка б з достатньою (заданою) точністю апроксимувала відображення  $\beta$  в  $J$  і мала, по можливості, нескладну структуру і алгоритм її визначення. Доцільна точність  $J(\beta)$  залежить від точності вимірів  $J$  і  $\beta$ , типу залежності  $J(\beta)$  і цілі, для якої будується ця модель.

### Алгоритм вирішення поставленої задачі

За теоремою Вейерштраса будь-яка гладка залежність  $J(\beta)$  може бути представлена рядом Тейлора і, якщо область  $\beta$  обмежена, а ряд нескінченний, то таке представлення точне:

$$J(\beta) = J(\beta_0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_0} \Delta \beta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|_{\beta_0} \Delta \beta_i \Delta \beta_j + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|_{\beta_0} \Delta \beta_i \Delta \beta_j \Delta \beta_k + \dots, \quad (2)$$

де  $\beta_0$  – глобальний центр розкладання,  $\Delta \beta = \beta - \beta_0$ .

Окрім глобального центру  $\beta_0$  області  $G$  введем (згідно до можливостей експерименту) ряд локальних центрів  $\beta_{0,r}$  ( $r = \overline{1, m}$ ) обмежених підобластей  $G_r$ . Розмір  $G_r$  обирається за умови, щоб з похибкою  $\delta$ , яка не перебільшує допустиму, залежність  $J(\beta)$  в цій підобласті апроксимувалася лінійною частиною розкладання (2), а відстань між центрами сусідніх підобластей була такою, що  $J(\beta)$  на множині сусідніх підобластей апроксимувалася з точністю до  $\delta$  лінійно-квадратичною складовою ряду (22).

Аналогічно, відстані між центрами груп сусідніх областей задовольняли умові апроксимації першими трьома членами ряду (2) і так далі. Таким чином, відбувається поступове збільшення розмірів області і, відповідно, порядку поліному (2). При цьому на  $p$ -му кроці ( $p = 1, 2, \dots$ ) автоматично відкидаються складові ряду, для яких коефіцієнти  $\frac{\partial^p J}{\partial \beta_i \dots \partial \beta_n} \Big|_{\beta_{0p}}$  несуттєві. Такий підхід дає можливість на кожному кроці визначати кінцеву множину коефіцієнтів  $\alpha$ , користуючись лише лінійною моделлю

$$\Delta y = \alpha \cdot \Delta \beta, \quad (3)$$

де - для локальних  $r$ -тих підобластей

$$\Delta y = \Delta J,$$

$$\alpha \cong \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0r}}, \quad \Delta \beta = \beta - \beta_{0r}; \quad (4)$$

для збільшених шляхом об'єднання сусідніх

$$\Delta y = \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0p}} - \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0r}},$$

$$\alpha \cong \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta_{0r}}, \quad \Delta \beta = \beta_{0p} - \beta_{0r}, \quad p \neq r. \quad (5)$$

і так далі.

Дійсно, для локальних сусідніх  $r$ -тих підобластей перша похідна від  $J$  по  $\beta$  в (2) наближено дорівнює

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0p}} \cong \frac{\partial J}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0r}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0r}} (\beta_{i0p} - \beta_{i0r}), \quad (6)$$

звідки витікає залежність (5);

- для збільшених сусідніх областей

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0k}} \cong \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0r}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \Big|_{\beta_{0r}} (\beta_{i0k} - \beta_{i0r}), \quad (7)$$

і так далі.

Якщо в якомусь  $l$ -му напрямку якась  $p$ -та похідна близька до нуля, то відповідний член ряду (2) відкидається ще під час визначення коефіцієнтів  $\alpha$  лінійної моделі (3). Тобто, шукана структура поліному (2) знаходиться автоматично без перебору всіх можливих варіантів. Коефіцієнти  $\alpha$  отриманого таким чином поліному можуть бути уточнені за умови мінімізації відповідної норми близькості  $J(\beta)$  і полінома  $J(\alpha, \beta)$ . Як правило, використовуються Евклідова середньоквадратична або Чебишевська норма рівномірного наближення. Для збільшення точності у відповідних підобластях можна використовувати зважену середньоквадратичну норму.

Дещо інший підхід до апроксимації  $J(\beta)$  аналітичною залежністю ви-  
тікає з наступного представлення ряду Тейлора, ізоморфного до виразу  
(2):

$$J(\beta) - J(\beta_0) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left. \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_0} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|_{\beta_0} + \left\{ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|_{\beta_0} + \dots \right\} \dots \Delta \beta_k \right\} \Delta \beta_j \right\} \Delta \beta_i, \quad (8)$$

або

$$\Delta y = \alpha(\beta) \cdot \Delta \beta. \quad (9)$$

Це вказує на можливість встановлення невідомої структури  $J(\beta)$  шля-  
хом побудови часткових моделей  $J(\alpha_1, \beta_1)$  за умови останніх  $\beta_i$  ( $i \neq 1$ )  
сталих. Далі коефіцієнти  $\alpha_1$  як функції  $\beta_2$  апроксимуються відповід-  
ними залежностями  $\alpha_1(\beta_2, \alpha_2)$ , далі  $\alpha_2$  від  $\beta_3$  і, врешті решт, отримаємо  
шукану залежність  $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$  для моделі (9). В такому підході одно-  
мірність апроксимуваних залежностей спрощує задачу вибору структури  
часткових моделей. Для цього можна створити базу канонічних моделей  
(моделей з мінімальною розмірністю вектора  $\alpha$  невідомих коефіцієнтів та  
впорядкувати її за допомогою таблиці властивостей. Тоді претендентом  
на кращу модель буде та, множина властивостей якої найбільше співпа-  
дає з аналогічною множиною властивостей експериментальної кривої.

## Приклади

**1. Тестовий приклад.** Невідома залежність  $J(\beta) = \beta_1 + 0.5\beta_1\beta_2 + 0.5\beta_2^2$ ,  
задана таблицею 1,

Таблиця 1

Область	$G_1$			$G_2$			$G_3$		
точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$J$	0	0.1	0.005	-1	-0.9	-0.945	1	0.61	0.605
$\beta_1$	0	0.1	0	-1	-0.9	-1	0	0.1	0
$\beta_2$	0	0	-0.1	0	0	-0.1	-1	-1	-1.1

де загальна область  $G$  складається з трьох підобластей  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  
в кожній з яких є центрова точка 1, 4, 7 відповідно і по дві з відхи-  
ленням  $\pm 0.1$  від центрної. За рівнянням (3) визначаються перші похі-  
дні  $\left. \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_{0r}}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $r = 1, 2, 3$ ; далі, для всієї області  $G$  – другі похі-  
дні (5); після їх підстановки в рівняння (2) отримано рівняння моделі:  
 $\hat{J}(\beta) = [\beta_1 + 0.5\beta_1\beta_2 + 0.5\beta_2^2] + 0.05\beta_2$ , яке після відкидання несуттєвої  
складової  $0.05\beta_2$ , що виникла внаслідок заміни похідної різницею, спів-  
пало з шуканим.

## 2. Отримання аналітичної залежності енергії першої півхвилі струму розряду конденсатора С в колі з індуктивністю L і опором R залежно від добротності $\beta$ контуру.

Струм  $x$  з  $R, L, C$  – параметрами кола зв'язаний рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}x = 0, \quad \int_{-\infty}^0 x(t)dt = CU_C(0), \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (10)$$

де  $U_C(0)$  – початкові умови по напрузі  $U_C$  на конденсаторі,  $x(0) = 0$ . Показник

$$J(\beta) = \left( \frac{CU_C^2(0)}{2} \right)^{-1} \int_0^{t_1} Rx^2(t)dt, \quad t_1 = \underset{t \in (0, \infty)}{Arg S_{upr}^2 x(t)} \quad (11)$$

Задача (10), (11) була вирішена чисельним методом, а отримана залежність  $J(\beta)$ , де  $\beta$  – скаляр, апроксимована дробово-раціональною функцією від  $\beta$  згідно до властивостей графіку (екстремальний, несиметричний) (рис.1)

$$\hat{J}(\beta) = \frac{-0.031 + 1.066\beta - 0.685\beta^2 + 0.149\beta^3}{1 + 0.23\beta - 8.87 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 1.112 \cdot 10^{-5}\beta^3}. \quad (12)$$

Звідки оцінка  $\hat{\beta}^*$  оптимального значення  $\beta^*$  знаходиться за умови  $\frac{\partial \hat{J}(\beta)}{\partial \beta} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \hat{J}(\beta)}{\partial \beta^2} < 0$ . Похибка  $\frac{\beta^* - \hat{\beta}^*}{\beta^*} \cdot 100\%$  склала 0.05%.

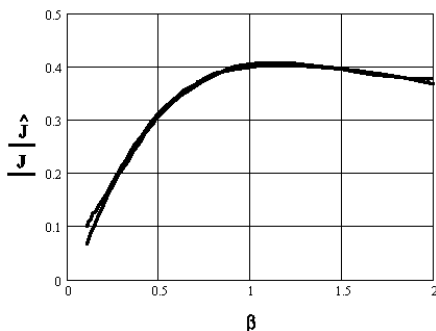


Рис. 1 – Залежність  $J(\beta)$  та її модель  $\hat{J}(\beta)$

## Отримання багатомірних нелінійних залежностей в енергетичних об'єктах за даними натурних випробувань

На рис. 2 наведено графіки експериментальної  $J(\beta)$  та аналітичної  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2)$  залежностей. Останню отримано шляхом апроксимації коефіціє-

ентів  $\alpha_i$  локальних  $i$ -х моделей  $\hat{J}(\beta_1) = \alpha_{1i}\beta_1 + \alpha_{2i}\beta_1^2$ ,  $i = \overline{1,6}$ , лінійними функціями від  $\beta_2$   $\alpha_{ij}(\beta_2) = \alpha'_{j2} + \alpha'_{j1}\beta_2$ ,  $j = 1, 2$ . Повна модель має вигляд:

$$\hat{J}(\beta_1, \beta_2) = (\alpha'_{10} + \alpha'_{11}\beta_2)\beta_1 + (\alpha'_{20} + \alpha'_{21}\beta_2)\beta_1^2.$$

Середньоквадратична похибка не перевищувала 2% від  $J_{\max}$ .

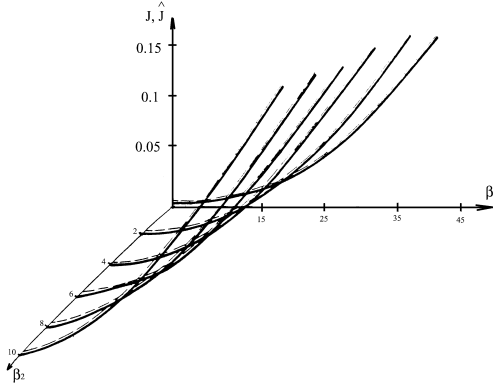


Рис. 2 – Залежність  $J(\beta_1, \beta_2)$  (пунктир) та її модель  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2)$

На рис. 3 наведено графіки експериментальної  $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  та аналітичної  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  залежностей, отриманих аналогічним шляхом:

$$\hat{J}(\beta_1) = \alpha_{1ik}\beta_1 + \alpha_{2ik}\beta_1^2, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3; \quad (13)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha'_{jk}\beta_2 + \alpha''_{jk}\beta_2^2, \quad j = 1, 2; \quad (14)$$

$$\alpha_{jk}^{(l)}(\beta_3) = \alpha'_j\beta_3 + \alpha''_j\beta_3^2. \quad (15)$$

Після підстановки коефіцієнтів (15) в (14)Б а (14) в (13) отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.96 \cdot 10^{-6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + \\ & + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.24 \cdot 10^{-4} \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 + \\ & + 0.46 \cdot 10^{-5} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Похибка апроксимації не перевищує 0.5% від максимального значення  $J$ .

У разі, якщо допустима похибка складає 5% вираз (16) суттєво спрощується

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + \\ & + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned}$$

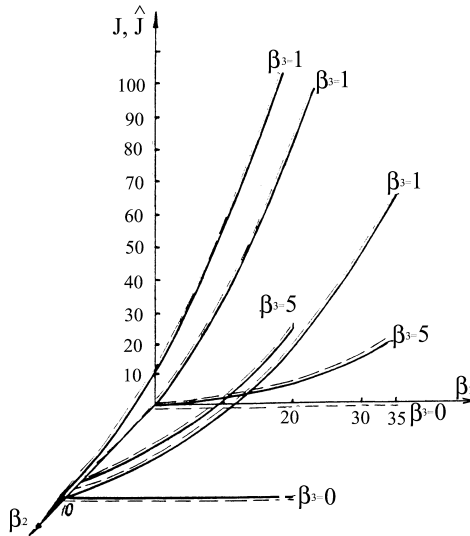


Рис. 3 – Залежність  $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  та її модель  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

### Висновки

Рациональне використання методів математичного чисельного моделювання або експериментального дослідження та методів теорії ідентифікації дає можливість отримати аналітичну залежність, що пов'язує відповідні параметри досліджуємої чи проектуємої складної системи. Отримана аналітична залежність  $\hat{J}(\beta)$  далі використовується для вирішення задач аналізу і синтезу систем, для інтерполяції та екстраполяції на режими, для яких відсутні експериментальні дані.

### Література

1. Александровский Н.М., Дейч А.М. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов (обзор) // Автоматика и телемеханика, 1967.- 1.-с.167-183.
2. Сильвестров А.Н. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов // Проблемы управления и информатики, 1996.- 6.-с.54-65.
3. Wiener N. Response of a Nonlinear Device to Noise/ Report V-16S, Radiation Laboratory. MTT, 1942.
4. Сильвестров А.М., Резніченко В.М. Спосіб вимірювання аеродинамічних коефіцієнтів повздовжнього руху літаків/ Патент України 48566А.Бюл. 8,2002.
5. Ту Ю. Современная теория управления. М.: Машиностроение, 1971.